**Contrôle Option Maths Expertes**

**30/01/2025**

***Congruences & Divisibilité – Calculatrice Autorisée***

**Exercice 1 2 pts**

On recherche les entiers relatifs $n>3$ tels que $n-3$ divise $n^{2}+5$.

1. Vérifier que pour tout $n$ : $n^{2}+5-\left(n-3\right)\left(n+3\right)=14$.
2. Trouver tous les entiers relatifs $n>3$ tels que $n-3$ divise $n^{2}+5.$

**Exercice 2 3 pts**

1. Quel est le reste dans la division euclidienne de $2 025 $et $2 018$ par $7 $?
2. Montrer que $2^{3}≡1 [7]$.
3. Quel est le reste de $2 025^{2 025}$ dans la division par $7$ ?
4. Quel est le reste de $2 018^{2 018}$ dans la division par $7$ ?

**Exercice 3 4 pts**

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u\_{n}=11^{2n}+2^{n+4}$.

1. Calculer $u\_{0}, u\_{1}$. Vérifier que $u\_{1}≡0 [17]$.
2. Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de $11^{2}$ par $17$.
3. Démontrer que pour tout $n$, $u\_{n}$ est un multiple de $17$.

**Exercice 4 3 pts**

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $1 000 n≡n [111]$.
2. Expliquer comment on trouve le reste de la division par $111$ du nombre $123 456 789$, sans poser la division.

**Exercice 5 4 pts**

On appelle inverse de $x$ modulo $5$ un entier $y$ tel que $xy≡1 [5]$.

1. Déterminer un inverse de $x=2$.
2. Est-il vrai que $4$ est son propre inverse ?
3. Le nombre $5$ admet-il un inverse ? Justifier.
4. Résoudre dans $Z$ les équations :

$$\left(E\_{1}\right) :9 x≡12 \left[5\right] et \left(E\_{2}\right) :2x+3≡3 \left[5\right]$$

**Exercice 6 4 pts**

Soit l’équation $17x+6≡6x-4 \left[8\right].$

1. Résoudre cette équation à l’aide d’une table de congruence.
2. Donner les solutions de cette équation qui sont dans l’intervalle $\left[100 ;140\right]$.