**Contrôle Option Maths Expertes**

**13/05/2025**

***Calculatrice Autorisée – Durée 1h50***

**Exercice 1 3 pts**

Déterminer, ***en justifiant soigneusement***, l’ensemble des couples $\left(a ;b\right) \in N^{2}$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{c}a+b=72\\PGCD \left(a ;b\right)=9\end{array}\right.$$

**Exercice 2 3 pts**

Les trois questions sont indépendantes :

1. A l’aide de la formule de Moivre, donner la forme algébrique de $\left(-5+5 i \sqrt{3}\right)^{6}.$
2. A l’aide des formules d’Euler, écrire $sin^{4}(x)$ sous la forme d’une expression linéarisée

 (**rappel** : ***expression linéarisée = sans puissances***…)

1. Soit :

$$P\left(z\right)=\frac{1}{2} z^{3}+5z+\frac{11}{2}.$$

Montrer que $-1$ est une racine de $P$, puis résoudre l’équation $P\left(z\right)=0$.

**Exercice 3 5 pts**

Le plan complexe est muni d’un repère orthonormé direct $\left(O ;\vec{u} , \vec{v}\right)$.

On considère la suite de nombres complexes $\left(z\_{n}\right)$ définie par $\left\{\begin{array}{c}z\_{0}=0 \\z\_{n+1}=\left(1+i\right)z\_{n}-i\end{array}\right.$

Pour tout entier naturel $n$, on note $A\_{n}$ le point d’affixe $z\_{n} $et $B$ le point d’affixe $z\_{B}=1$.

* 1. Montrer que $z\_{1}=-i$ et que $z\_{2}=1-2i$ puis calculer $z\_{3}$.
	2. Placer les point $B, A\_{1}, A\_{2} $et $A\_{3}$ dans $\left(O ;\vec{u} , \vec{v}\right)$ (*unité graphique 1 cm sur les deux axes*).
	3. Calculer $\frac{z\_{2}-z\_{1}}{z\_{B}-z\_{1}}$. Quelle est la nature du triangle $BA\_{1}A\_{2}$ ? ***Justifier***.
1. Pour tout entier naturel $n$, on pose $u\_{n}=\left|z\_{n}-1\right|$.
	1. Démontrer que la suite $(u\_{n})$ est géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
	2. Déterminer à partir de quel entier naturel $n$, la distance $BA\_{n}$ est strictement supérieure à $1 000$. ***On détaillera la démarche choisie***.
	3. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $1+i$.
	4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$z\_{n}=1-\left(\sqrt{2}\right)^{n} e^{i\frac{n π}{4}}.$$

* 1. Le point $A\_{2020} $appartient-il à l’axe des abscisses ? ***Justifier***.

**Exercice 4 4 pts**

1. Déterminer en appliquant l’algorithme d’Euclide un couple $\left(u\_{0} ;v\_{0}\right)\in Z^{2}$, solution de l’équation :

$$\left(E\right) : 7u+9v=1.$$

1. On cherche maintenant toutes les solutions $\left(u ;v\right)\in Z^{2}$ de l’équation :

$$\left(E^{'}\right) : 7u+9v=8.$$

1. En utilisant la question précédente, déterminer une solution particulière de l’équation $(E^{'})$.
2. Montrer alors que les solutions $\left(u ;v\right)\in Z^{2}$ de $(E^{'})$ vérifient l’équation :

$$7\left(u-32\right)=-9\left(v+24\right)$$

1. En déduire toutes les solutions de l’équation $(E^{'})$.

**Exercice 5 5 pts**

1. On se propose de déterminer l’ensemble *S* des entiers $n \in Z$ vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{c}n≡9 \left(17\right)\\n≡3 \left(5\right) \end{array}\right.$$

1. On désigne par $(u ; v)$ un couple d’entiers relatifs tel que : $17u + 5v = 1$.
2. Justifier l’existence d’un tel couple $(u ; v)$.
3. On pose $n\_{0} = 3 × 17u + 9 × 5v$. Démontrer que $n\_{0}$ appartient à *S*.
4. Donner un exemple d’entier $n\_{0}$ appartenant à *S*.
5. Soit $n$ un entier relatif appartenant à *S*. Démontrer que $n - n\_{0} ≡ 0 (85)$.
6. En déduire qu’un entier relatif $n$ appartient à *S* si et seulement si $n$ peut s’écrire sous 1a forme $n = 43 + 85k$ où $k$ est un entier relatif.
7. Zoé sait qu’elle a entre $300$ et $400$ jetons. Si elle fait des tas de $17$ jetons, il lui en reste $9$. Si elle fait des tas de $5$ jetons, il lui en reste $3$. Combien a-t-elle de jetons ?



**Un peu d’humour !!!!! Bon courage…**