PUISSANCES DE 10.

I- Activité préliminaire :

Exercices :

- Quelle est l'aire d'un carré de 10 cm de côté ?

  Notation : .... Lecture : ....

- Quel est le volume d'un cube de 10 cm d'arête ?

  Notation : .... Lecture : ....

Vocabulaire :

10^2 et 10^3 sont des **puissances de dix.**

2 et 3 sont appelés **exposants.**

II- Puissances de dix : présentation :

1) Exposants positifs :

a) Tableau :

$\times 10$ $\times 10$ $\times 10$

Ecriture décimale	100	1 000	10 000	100 000
Opération associée	10×10			
Ecriture sous forme de puissance	10^2			
Exposant	2			

b) Observations :

- Que devient l'exposant lorsqu'on multiplie 10^3 par 10 ? ....
- Et lorsqu'on multiplie 10^4 par 10 ? ....
- Généralisation :
  - Observation des lignes 1 et 3 du tableau. Que remarque-t-on ?
    ....
    ....
  - Observation des lignes 2 et 4 du tableau. Que remarque-t-on ?
    ....
    ....

c) Propriété :

$$\underbrace{10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{...... facteurs}} = 1\underbrace{0\ 000}_{\text{...... zéros}}$$

Soit n un entier positif

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{\dots\dots \text{ facteurs}} = 1\underbrace{00\dots0}_{\dots\dots \text{ zéros}}$$

d) Exemples :

Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une puissance de dix :

10 000 000 = ...   100 000 = ...

2) Exposants relatifs :

a) Tableau :

÷ 10   ÷ 10   ÷ 10   ÷ 10   ÷ 10   ÷ 10

Ecriture décimale	1 000	100					
Ecriture avec exposant	10^3	10^2					
Exposant	3	2					

b) Observations :

- Que devient l'exposant lorsqu'on divise 10^3 par 10 ? ....
- Et lorsqu'on divise 10^2 par 10 ? ....
- Généralisation :
  - Quel est le nombre de zéros dans l'écriture décimale d'un dixième ? ....
  - Quel est l'exposant de la puissance de dix égale à un dixième ? ....
  - Mêmes questions pour un millième :

Nombre de zéros : ....   exposant : ....

c) Propriété :

$10^{-3} = 0{,}001$ ...... zéros

Soit n un entier positif

$$10^{-n} = \underbrace{0{,}0 \dots\dots 0}_{\text{...... zéros}}1$$

d) Exemples :

Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une puissance de dix :

0,001 = ...

0,000 01 = ...

3) Inverse d'une puissance de dix :

a) Tableau :

Ecriture décimale	Nombre de zéros	Ecriture sous forme d'une puissance de dix	Ecriture sous forme d'une fraction	Ecriture sous forme d'un quotient de puissances de dix	Conclusion
0,01		$10^{\cdots\cdots}$	$\dfrac{1}{\dots\ \dots}$	$\dfrac{1}{10^{\cdots\cdots}}$	$10^{\cdots\cdots} = \dfrac{1}{10^{\cdots\cdots}}$
0,000 001		$10^{\cdots\cdots}$	$\dfrac{1}{\dots\ \dots\ \dots\ \dots}$	$\dfrac{1}{10^{\cdots\cdots}}$	$10^{\cdots\cdots} = \dfrac{1}{10^{\cdots\cdots}}$

b) Propriété :

$\dfrac{1}{10^4}$ est … … … … … … de 10^4 . Or $\dfrac{1}{10^4} = 10^{-4}$. Donc 10^{-4} est … … … … … … de 10^4 .

Soit n un entier positif.

$10^{-n} = \dfrac{1}{10^{\cdots\cdots}}$ est … … … … … de $10^{\cdots\cdots}$

c) Exemples :

Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une puissance de dix :

$\dfrac{1}{10\ 000\ 000} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{1}{10\ 000\ 000\ 000} =$

III- Puissances de dix : opérations.

1) Produit :

a) Observations :

Compléter le tableau :

$\times$	100	1 000
10		
10 000		

Compléter le tableau en remplaçant chaque nombre par la puissance de dix correspondante :

$\times$	10^2	10^3
10^1		
10^4		

A l'aide du tableau précédent, compléter :

$10^1 \times 10^2 = 10^{\cdots\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots\cdots}$ $\qquad$ $10^4 \times 10^2 = 10^{\cdots\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots\cdots}$

$10^4 \times 10^3 = 10^{\cdots\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots\cdots}$

Peut-on faire la même constatation lorsque les exposants sont relatifs ?

Ecritures décimales	Puissances de dix
$\mathbf{0,1 \times 0,01 =}$ ………………………	$\mathbf{10^{\cdots\cdots} \times 10^{\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots}}$
$\mathbf{100 \times 0,000\,001 =}$ ………………	$\mathbf{10^{\cdots\cdots} \times 10^{\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots}}$

b) Propriété :

Soit m et n deux entiers relatifs. $\mathbf{10^m \times 10^n = 10^{\cdots\cdots}}$

c) Exemple :

Le diamètre d'un atome d'hydrogène est environ 0,000 000 1 mm

- Exprimer ce nombre avec une puissance de dix : ………………………………………………
- Calculer la longueur obtenue en alignant un milliard d'atomes identiques.

……

En alignant 1 milliard d'atomes identiques, on obtient une longueur de …………… mm soit …………cm.

2) Quotient :

Soit m et n deux entiers relatifs. $\mathbf{\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{\cdots\cdots}}$

Exemples :

$\dfrac{10^5}{10^{-3}} = 10^{\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots}$; $\dfrac{10^{-2}}{10^{-6}} = 10^{\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots}$

3) Puissance d'une puissance :

Soit m et n deux entiers relatifs. $\mathbf{(10^m)^n = 10^{\cdots\cdots}}$

Exemples :

$(10^3)^{-2} = 10^{\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots}$; $(10^{-5})^{-1} = 10^{\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots}$

IV- Notation scientifique et ordre de grandeur :

1) Notation scientifique :

La notation scientifique d'un nombre décimal non nul est son écriture de la forme : $a \times 10^n$.

- **10^n → puissance de 10 avec n qui est un entier relatif.**
- **a → nombre décimal ayant un seul chiffre (différent de 0) avant la virgule.**

Exemples :

Nombre	Notation Scientifique
$60\,000\,000$	… … … … … … … … … … … …
$0,008\,4$	… … … … … … … … … … … …
$-\ 23\,000$	… … … … … … … … … … … …
$-\ 0,000\,562$	… … … … … … … … … … … …

2) Ordre de Grandeur :

La puissance de 10 la plus proche de la notation scientifique d'un nombre donne l'ordre de grandeur de ce nombre.

	Diamètre de la Lune	Diamètre de la Terre	Diamètre du Soleil	Diamètre de Mars
Environ	$3,5 \times 10^3\ km$	$1,27 \times 10^4\ km$	$1,39 \times 10^6\ km$	$6,8 \times 10^3\ km$
Ordre de Grandeur	… … … … … km	… … … … … km	… … … … … km	… … … … … km

3) Préfixes

10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
téra	Giga	méga	kilo	hecto	déca	déci	centi	milli	micro	nano	pico
T	G	M	k	h	da	d	c	m	µ (mu)	η (nu)	p

Exemples :

- 5 kilogrammes = 5 kg = 5×10^3 g = 5 000 g
- 5 mégaoctets = 5 Mo = 5×10^6 octets
- 37 micromètres = 37 µm = 37×10^{-6} m
- 3 cL = 3×10^{-2} L = 0,03 L

4) Calculatrice

Utiliser la séquence : 10 ^ n Par exemple pour écrire $3 \text{x} 10^4$	3*10^4 30000

5) Exercices

- Recopier et compléter avec une puissance de 10 :

1 km = ... m 1 mm = ... m

1 km = ... cm 1 mm = ... cm

- Dans un ordinateur, l'unité de stockage des informations est l'octet (o) :

Compléter avec le symbole de l'unité qui convient :

35 milliards d'octets, c'est-à-dire 35 ....

17 500 octets c'est-à-dire 17,5 ....

128 millions d'octets c'est-à-dire 128 ....

- **a)** Sur les photographies ci-dessous, quelle clé USB a la plus grande capacité ?

b) Combien de petites clés USB peut-on copier sur la plus grande des deux ?
Justifier la réponse.

....

....

....

....

....

PUISSANCE D'UN NOMBRE RELATIF.

I- Définition :

a désigne un nombre relatif et n un nombre entier positif (différent de 0) :

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ **se lit « a exposant n. »**
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ *avec* $a \neq 0$ **se lit « a exposant $-n$. »**

Cas particuliers :

$a^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$0^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-1)^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-1)^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemples :

$(-5)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $3^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarques :

- une puissance d'un nombre relatif positif donne toujours un nombre .... ;
- une puissance **paire** d'un nombre relatif négatif donne toujours un nombre .... ;
- une puissance **impaire** d'un nombre relatif négatif donne toujours un nombre ....

Exemples :

$(-3)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$-3^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-4)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$-4^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

II- Utilisation de la calculatrice :

Exemples : En utilisant la calculatrice, calculer 15^8.

$15^8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $2^{-5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

III- Puissance d'un nombre relatif non nul : opérations :

1) Produit :

a) Activité :

• Observer les calculs suivants :

$$A = 3^2 \times 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$$

$$B = 5^{-2} \times 5^4 = \frac{1}{5 \times 5} \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5 \times 5 = 5^2$$

• En déduire l'écriture sous la forme d'une seule puissance des expressions suivantes :

$$C = 2^3 \times 2^5 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D = 7^{-2} \times 7^{-3} = \frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \times \frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

• Comment procède-t-on pour écrire le produit de deux puissances d'un même nombre sous la forme d'une seule puissance ?

………

b) Propriété :

Soit m et n deux entiers relatifs et a un nombre relatif non nul, on a : $a^m \times a^n = a^{\dots\dots}$

c) Exemples :

$E = 6^{-3} \times 6^{-2} = 6^{\dots\dots} = 6^{\dots\dots}$; $F = 35^7 \times 35^{-7} = 35^{\dots\dots} = 35^{\dots\dots} = \dots\dots\dots\dots$

2) Quotient :

a) Propriété :

Soit m et n deux entiers relatifs et a un nombre relatif non nul, on a : $\frac{a^m}{a^n} = a^{\dots\dots}$

b) Propriété :

$G = \frac{7^{-5}}{7^3} = 7^{\dots\dots} = 7^{\dots\dots}$; $H = \frac{9^8}{9^{-5}} = 9^{\dots\dots} = 9^{\dots\dots} = 9^{\dots\dots}$

3) Puissance d'une puissance :

a) Propriété :

Soit m et n deux entiers relatifs et a un nombre relatif non nul, on a : $(a^m)^n = a^{\cdots\cdots\cdots}$

b) Exemples :

$I = (-5^3)^{-5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $J = (11^{-2})^{-6} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4) Puissance d'un produit ou d'un quotient :

a) Activités :

• Calculer en respectant les étapes :

$(2 \times 3)^3 = \ldots = \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$ $\quad et \quad 2^3 \times 3^3 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \times \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $\quad et \quad \frac{5^2}{6^2} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

• Quelle conclusion peut-on en tirer dans chacun des cas ?

→ Puissance d'un produit : ………………………………………………………………………………………

→ Puissance d'un quotient : ………………………………………………………………………………………

b) Propriétés :

Soit m un entier relatif et a et b deux nombres relatifs non nuls, on a : $(a \times b)^m = a^{\cdots\cdots} \times b^{\cdots\cdots}$	**Soit m un entier relatif et a et b deux nombres relatifs non nuls, on a :** $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^{\cdots\cdots}}{b^{\cdots\cdots}}$

c) Exemples :

• $(5 \times (-2))^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad ou \quad (5 \times (-2))^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

• $(5 \times 7)^{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{\ldots\ldots} \times \frac{1}{\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots} \times \frac{1}{\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots}$ $\quad ou \quad (5 \times 7)^{-3} = \ldots\ldots = \frac{1}{\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots}$

• $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\frac{1}{\ldots\ldots}}{\frac{1}{\ldots\ldots}} = \frac{\frac{1}{\ldots\ldots}}{\frac{1}{\ldots\ldots}} = \frac{1}{\ldots\ldots} \times \frac{\ldots\ldots}{1} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $\qquad \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\right)^2} = \frac{1}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

• $\left(\frac{5}{-2}\right)^4 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

IV- <u>Priorités dans les opérations :</u>

Dans un calcul, on doit faire dans l'ordre :

- **Effectuer les calculs entre parenthèses en commençant par les plus intérieures ;**
- **Calculer les nombres avec une puissance ;**
- **Effectuer les multiplications et les divisions ;**
- **Terminer par les additions et les soustractions.**

<u>Exemple :</u> *Calculer l'expression* : $A = 1 + 2^3 \times 5^2 + (7 \times 15 - 5)$.

$\boldsymbol{A} =$ ……………………………………………………………………………………

$\boldsymbol{A} =$ ……………………………………………………………………………………

$\boldsymbol{A} =$ ………………………………

EXERCICE

Dans la grille ci-dessous, inscris le nom d'unités du système métrique (comme « picomètre »). Certaines définitions correspondent à un ordre de grandeur de l'unité. (Tu peux t'aider d'Internet, d'une encyclopédie par exemple…)

a. Plus grande distance Nord-Sud en France.

b. 10^{-24} m.

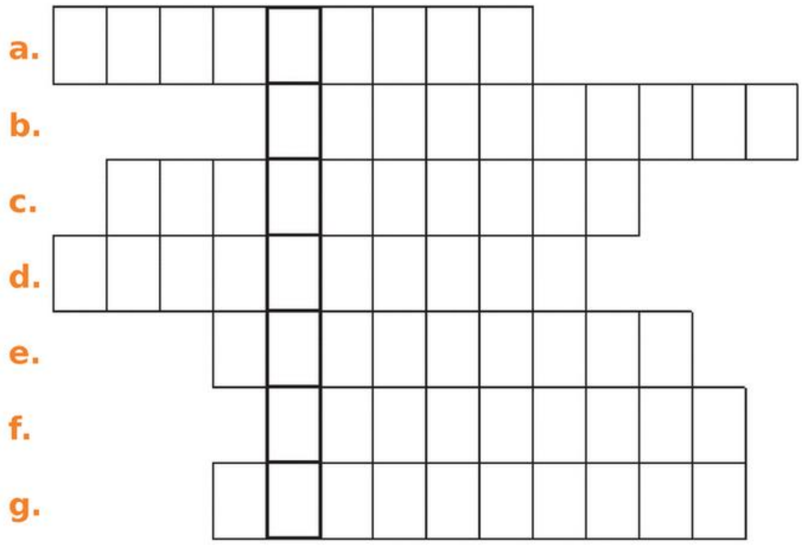
c. Taille d'une bactérie.

d. Taille d'une puce.

e. Taille d'une molécule d'eau.

f. Longueur d'un bus.

g. Taille d'un proton.



Quel est, alors, le mot obtenu dans les cases en gras ? ***En donner une signification mathématique***.