OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS

I) ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS DE FRACTIONS

1) Égalités de Fractions

PROPRIETE

Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas quand on multiplie (ou quand on divise) ces deux nombres par un même nombre relatif différent de 0.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b}=\frac{a\div c}{b\div c} \qquad \text{avec} \qquad b\neq 0 \ \text{ et } \ c\neq 0$$

EXEMPLES

$$\frac{2}{-0{,}3}=\frac{2\times 10}{-0{,}3\times 10}=\frac{20}{-3}=-\frac{20}{3}$$

$$\frac{-18}{12}=-\frac{18}{12}=-\frac{6\times 3}{6\times 2}=-\frac{3}{2}$$

Pensez aux critères de divisibilité !!!

2) Addition et Soustraction avec les mêmes dénominateurs

PROPRIETE

Pour additionner (ou soustraire) des nombres relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le même dénominateur.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c} \qquad \text{avec} \qquad c\neq 0.$$

EXEMPLES

$$\frac{1}{12}+\frac{-7}{12}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=-\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=-\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=-\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\frac{-3}{8}-\frac{-9}{8}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

3) Addition et Soustraction avec des dénominateurs différents

PROPRIETE

Pour additionner (ou soustraire) des nombres relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le même dénominateur.

EXEMPLES

L'un des dénominateurs est multiple de l'autre :

$A = \frac{-2}{3} + \frac{7}{9}$ $\qquad$ $B = 5 + \frac{-3}{8}$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ $\qquad$ $B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ $\qquad$ $B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ $\qquad$ $B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ $\qquad$ $B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

Les dénominateurs n'ont aucun diviseur commun :

$$C = \frac{1}{4} - \frac{2}{5}$$

On réduit au même dénominateur 20 qui est le produit des deux dénominateurs.

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad \rightarrow \quad$ $C = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Les dénominateurs ont un (ou des) diviseur(s) commun(s) :

$$D = \frac{7}{20} - \frac{5}{12}$$

Il faut trouver un dénominateur commun qui soit multiple de 20 et de 12.

Bien sûr, $240 = 12 \times 20$ convient. Cependant, pour éviter trop de calculs, il vaut mieux choisir un multiple commun à 20 et 12 qui soit le plus petit possible.

Il y a deux méthodes possibles :

- Le tableau suivant permet de trouver le plus petit multiple commun :

Multiples de 20	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**
Multiples de 12	**12**	**24**	**36**	**48**	**60**

- On utilise la décomposition en produits de facteurs premiers :

$$20 = 2 \times 2 \times 5 \quad \text{et} \quad 12 = 2 \times 2 \times 3$$

On en déduit le plus petit multiple commun : $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

$D = \frac{7}{20} - \frac{5}{12}$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

II) MULTIPLICATION DE FRACTIONS

PROPRIETE

Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux en respectant la règle des signes.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \text{et} \quad a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d} \quad \text{avec} \quad b \neq 0 \quad \text{et} \quad d \neq 0$$

EXEMPLE 1

$$\frac{-5}{7} \times \frac{3}{4} = \dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots$$

EXEMPLE 2

$$-2 \times \frac{-5}{7} = \dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots$$

EXEMPLE 3 : *Penser à simplifier avant de calculer !!!*

$$\frac{2}{15} \times \frac{-21}{14} = \dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots$$

EXEMPLE 4 : Prendre les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$ d'une tarte aux mûres.

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots$$

Les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$ d'une tarte représente ………… de la tarte

III) DIVISION DE FRACTIONS

1) Reprenons le dernier exemple de l'activité

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{12}{15}}{\frac{35}{15}} = \frac{\frac{12}{15} \times 15}{\frac{35}{15} \times 15} = \frac{12}{35}$$

Comment passer de la fraction du numérateur au résultat en un seul calcul ?

$$\frac{4}{5} \times \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{12}{35}$$

CONCLUSION : diviser par $\frac{7}{3}$ revient à multiplier par $\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$.

2) Inverse d'un nombre non nul

DEFINITION

Deux nombres sont inverses si leur produit est égal à 1.

PROPRIETE

- l'inverse d'un nombre x (non nul) est … … … ….
- l'inverse de $\frac{a}{b}$ (a et b non nuls) est … … … … .

EXEMPLES

- L'inverse de $-0{,}5$ est … … … … car $(-0{,}5) \times (\dots\dots\dots\dots) = 1$
- L'inverse de -8 est … … … … car $(-8) \times \dots\dots\dots\dots = 1$
- L'inverse de $\frac{2}{3}$ est … … … … car $\frac{2}{3} \times \dots\dots\dots\dots = 1$

3) Quotient de nombres en écriture fractionnaire

PROPRIETE

Diviser un nombre relatif en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ par un nombre relatif en écriture fractionnaire $\frac{c}{d}$, revient à multiplier $\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{c}{d}$.

Autrement dit :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

EXEMPLE 1

$\frac{-5}{7} \div \frac{3}{4} = \dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots$

EXEMPLE 2

$\frac{3}{4} \div 2 = \dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots$

EXEMPLE 3 : ***Calculs à « étages »***

$\frac{\frac{6}{5}}{7} = \dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots$

$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{7}} = \dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots$

- **La place du signe « = » par rapport aux traits de fractions est très importante….**

Alors ATTENTION !!!

IV) QUOTIENTS EGAUX ET PRODUIT EN CROIX

1) Règle

PROPRIETE

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$

Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$)

EXEMPLES

Equations du type : $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$

$\frac{x}{3} = \frac{5}{2}$

$\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots\dots$

La solution de l'équation est … … … ….

$\frac{-4}{x} = \frac{3}{5}$

$\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots\dots$

La solution de l'équation est … … … ….

On peut passer directement à cette étape.

On parle alors de quatrième proportionnelle.

2) Applications

Résoudre les équations ci-dessous :

$\frac{x}{2} = \frac{11}{7}$

$\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots\dots$

La solution de l'équation est … … … ….

$\frac{7}{x} = 12$

$\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots\dots$

La solution de l'équation est … … … ….