CONTRÔLE SPÉ MATHÉMATIQUES : FONCTION LN

05/03/2025

EXERCICE 1 — 2 pts

1) Exprimer en fonction de $\ln 3$, le réel A :

$$\boldsymbol{A} = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

2) Calculer le réel B :

$$\boldsymbol{B} = -2\ln(e^3) + 3\ln(1) + \ln\left(\frac{1}{e^{-1}}\right) - 4\ln(e^{-3})$$

EXERCICE 2 — 6 pts

1) Résoudre les équations suivantes :

   a) $(e^x - 3)(e^{2x} - 25) = 0$

   b) $\ln(-10x + 3) = 7$

   c) $\ln(-8x + 3) = \ln(9x + 10)$

2) Déterminer le plus petit entier n tel que

$$3 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n < 0{,}01$$

EXERCICE 3 — 4,5 pts

Calculer, sans se soucier du domaine de définition, la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (\ln(x))^2$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$

2) $g(x) = \ln(\ln x)$ sur $I =]1\,;\,+\infty[$

3) $h(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$

EXERCICE 4 — 4,5 pts

Étudier les limites des fonctions suivantes :

$$f(x) = -3x + e\ln(x) \qquad en + \infty$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{3x+5}{x-3}\right) \qquad en\ 3^+\ et + \infty$$

EXERCICE 5 — 4 pts

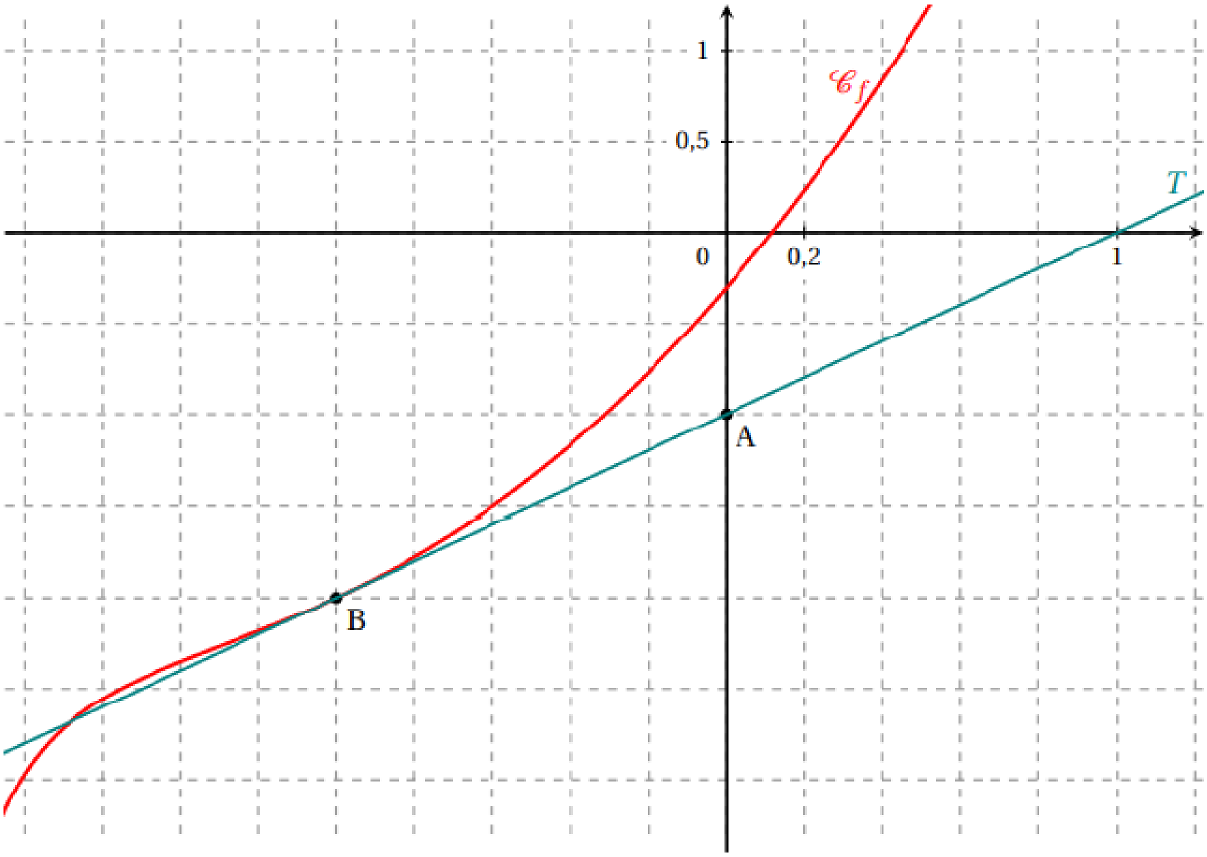
Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(7x + 2) \geq \ln(3 - x)$

2) $\ln(-x^2 + 4x + 6) < 0$

EXERCICE 6 19 pts

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point $A(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.

   On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$.

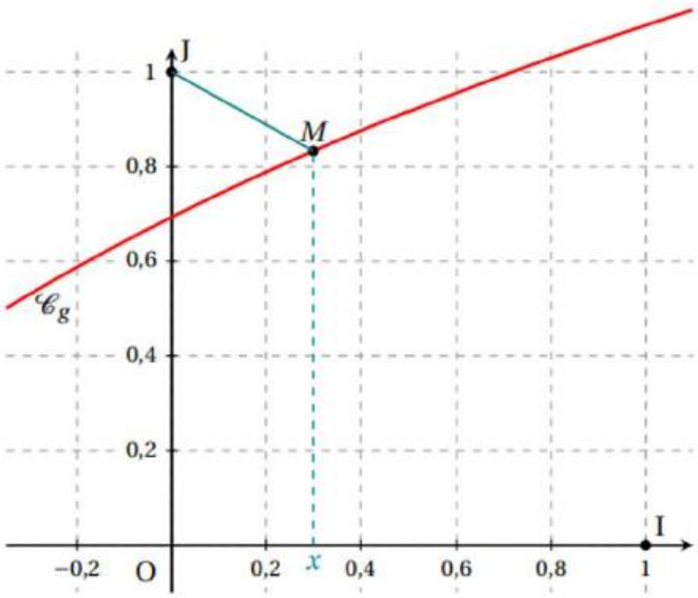
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad g(x) = \ln(x+2)$.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0\,;\,\text{I}\,,\,\text{J})$, représentée ci-après.
Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad h(x) = \text{J}M^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;\ +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

où f est la fonction étudiée en **partie B**.

a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\ +\infty[$.

Les limites ne sont pas demandées.

b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. On notera M_α le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.

a. Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

b. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

• **Madame et Monsieur Dehunegalzero ont une fille, comment s'appelle-t-elle ? ln….**
Eh oui, avec la belle ln, on se fend la poire… Avez-vous la réf ???

• **Logarithme et exponentielle sont dans un bateau. Tout à coup, Logarithme s'exclame, paniquée : "attention, on dérive ! ". Exponentielle lui répond "je m'en fiche !". Logarithme rétorque : « moi, à l'inverse……… »**

Hi hi hi hi hi…. Allez vite, au boulot…. Bon courage….