INTERROGATION SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES TERM

Durée : 1 h 30 – Calculatrice autorisée **04/10/2024**

EXERCICE 1 *8 pts*

Déterminer les limites suivantes en étant rigoureux sur la rédaction :

- $u_n = 10(1 - 0{,}1^n)$
- $v_n = \dfrac{0{,}2^n - 1}{3^n + 1}$
- $w_n = \dfrac{n^2 + 3n}{3n^2 + 4}$
- $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(n + 2)$
- $t_n = -2n^3 + n^2 - 6n + 3$
- $s_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

EXERCICE 2 *3 pts*

***Les deux questions sont indépendantes*.**

1) La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n + 2}{n^2 + 1}.$$

La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre ?

2) La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 3 + \frac{\cos(n)}{n + 1}.$$

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE 3 *5 pts*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}\, u_n \qquad \text{et} \qquad u_0 = -3.$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

3) Montrer alors que la suite (u_n) est croissante.

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

5) On note ℓ la limite de la suite. Déterminer ℓ sachant que ℓ vérifie

$$\ell = 1 + \frac{1}{3}\ell$$

EXERCICE 4

5 pts

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\,u_n + \frac{1}{2}\,n + 1.$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) On pose $v_n = u_n - n$.

- **a)** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
- **b)** Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
- **c)** Quelles sont les limites de la suite (v_n) et de la suite (u_n) ?

EXERCICE 5

9 pts

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2 - v_n} \end{cases}.$$

1)

- **a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $0 < v_n < 1$.
- **b)** Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}.$$

- **c)** Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

2)

- **a)** On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 1}.$$

  Démontrer que la suite (w_n) est arithmétique de raison -1.
- **b)** En déduire l'expression de w_n, puis celle de v_n en fonction de n.

3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n)$.

« Ce n'est point parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas
mais parce que nous n'osons pas qu'elles sont difficiles. »
Bon courage !!! et OSEZ (Hugues est d'accord…)
c'était même écrit sur son front, c'est pour dire !!! Bon courage à vous…