BACCALAUREAT GÉNÉRAL BLANC

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DU Jeudi 12 Décembre 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, en mode examen, conformément à la règlementation en vigueur. METTRE SA CALCULATRICE EN MODE EXAMEN.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées (ne pas rendre le sujet).

EXERCICE 1 *5 pts*

PARTIE A

La partie A de cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des 8 questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple, ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée dans la partie A.

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère :

- les points $A(2\,;5\,;4)$; $B(4\,;1;\,-2)$ et $C(7\,;\,-1\,;6)$;
- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 15+6t \\ z = 19-4t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1) Les points A, B et D sont alignés lorsque les coordonnées de D sont :

a) $D(2\,;8\,;7)$	**b)** $D(3\,;3\,;1)$	**c)** $D(5\,;3\,;\,-2)$	**d)** $D(22\,;\,-35\,;10)$

2) On considère le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$. Les coordonnées du point E sont :

a) $E(12\,;-16\,;-2)$	**b)** $E(11\,;-9\,;-6)$	**c)** $E(14\,;-11\,;\,2)$	**d)** $E(2\,;\,8\,;7)$

3) Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite d ?

a) $M_1(5\,;39\,;2)$	**b)** $M_2(0\,;2\,;8)$	**c)** $M_3(-2\,;16\,;17)$	**d)** $M_4(7\,;45\,;-1)$

4) $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite d lorsque les coordonnées de $\vec{u}$ sont :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}$	**b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\15\\19\end{pmatrix}$	**c)** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$	**d)** $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\18\\12\end{pmatrix}$

5) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a) $\begin{cases} x = 2+2t' \\ y = 5-4t' \\ z = 4+5t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$	**b)** $\begin{cases} x = 4-t' \\ y = 1+2t' \\ z = -2+3t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$	**c)** $\begin{cases} x = 2+2t' \\ y = 5-4t' \\ z = 3-6t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$	**d)** $\begin{cases} x = 4+3t' \\ y = 1-t' \\ z = -2+2t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$

6) Les droites d et (AB) sont :

a) sécantes	**b)** strictement parallèles	**c)** confondues	**d)** non coplanaires

7) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = e^{2n+1}$.
La suite (u_n) est :

a) Arithmétique de raison 2	**b)** Géométrique de raison e	**c)** Géométrique de raison e^2	**d)** Convergente vers e

8) On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}.$$

Cette suite :

a) Diverge vers $+\infty$	**b)** Converge vers 0	**c)** Converge vers $\frac{2}{5}$	**d)** Converge vers $\frac{1}{3}$

PARTIE B

Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point dans la partie B.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Affirmation 1 :
L'expression de la fonction dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{4\,e^{2x}}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (2x^2 - 5x + 3)e^{-x^2}.$$

Affirmation 2 :
La courbe représentative de la fonction g coupe exactement deux fois l'axe des abscisses.

EXERCICE 2 *5 pts*

Soit la suite (T_n) définie par $T_0 = 180$ et pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0{,}955\, T_n + 0{,}9$.

1)

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n $T_n \geq 20$.

b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}045\,(T_n - 20)$.

c) En déduire le sens de variation de la suite (T_n).

d) En déduire que la suite (T_n) est convergente. Justifier.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = T_n - 20$.

a) Monter que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0{,}955^n$.

c) Calculer la limite de la suite (T_n).

3) Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four. On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180°C et celle de l'air ambiant de 20°C. La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question $\mathbf{2}$) $\boldsymbol{c}$) était prévisible dans le contexte de l'exercice.

b) **<u>Information</u>** :

On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temps(x):
    T=180
    n=0
    while T>x:
       T=0.955*T+0.9
       n=n+1
    return n
```

La fonction Python ainsi décrite est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé. La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leq x$.

<u>Question</u> :

En utilisant la calculatrice, résoudre l'inéquation : $T_n \leq 120$

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 *5 pts*

Les trois exerciecs sont indépendants :

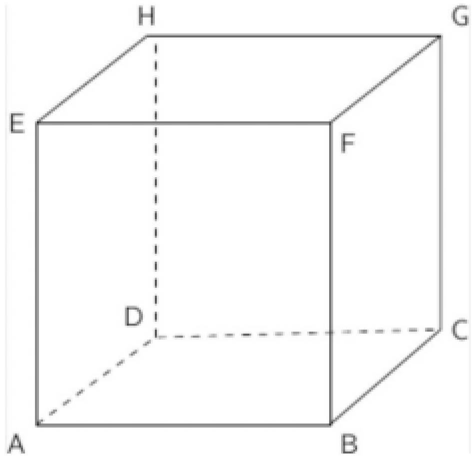
1) La droite Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer un vecteur directeur de Δ.

b) Justifier qu'il existe un point A de Δ d'abscisse 4.

c) La droite Δ passe-t-elle par le point B de coordonnées $\left(-10\,;\frac{16}{3}\,;\,-\frac{14}{3}\right)$?

2) On considère un cube $ABCDEFGH$ donné ci-contre.



On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$

et P le point tel que : $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{HG}$.

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$.

a) Donner les coordonnées des points M, N et P.

b) **(i)** Écrire un système d'équations paramétriques des droites (MP) et (FG).

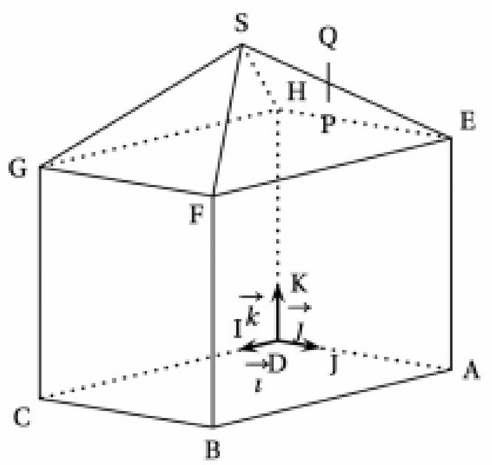
(ii) Les droites (MP) et (FG) sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

c) On donne le point T de coordonnées $\left(1\,;1\,;\frac{5}{8}\right)$.
Le triangle TPN est-il rectangle ?

3) Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ surmontée d'une pyramide $EFGHS$. Dans le repère proposée par la figure, on donne les coordonnées des points P et Q :

$P(2\,;3\,;5)$ et $Q(2\,;3\,;5{,}5)$.

Le segment $[PQ]$ représente, sur le toit, une antenne.



Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \\ z = 2 + 4s \end{cases}$ où $s \in \mathbb{R}$.

L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment $[PQ]$?

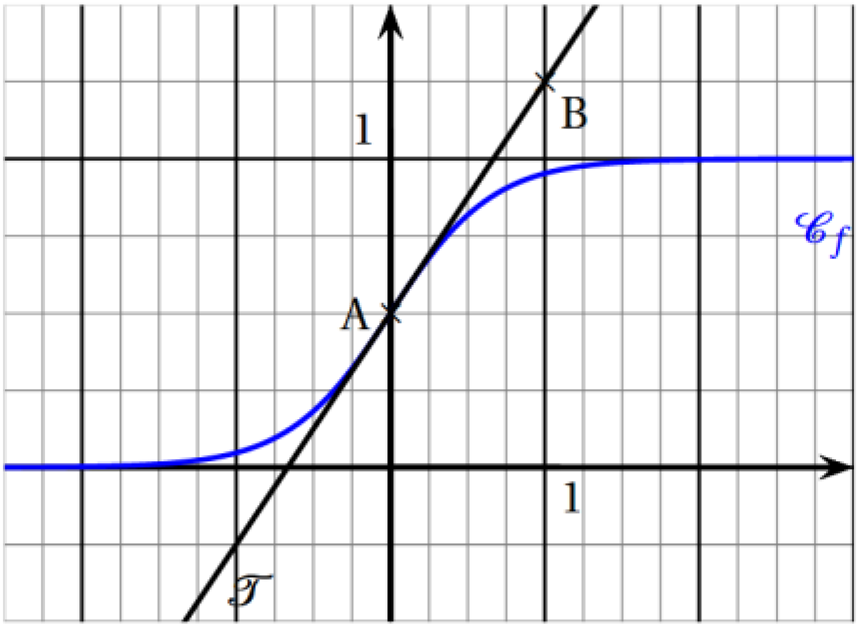
EXERCICE 4 *5 pts*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\dfrac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A – Lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.

2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B – Étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.

2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.

Partie C – Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f''(x)=\dfrac{9\,\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}$.

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

3. a. Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

b. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

c. En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.