

# CONTRÔLE OPTION MATHS EXPERTES

28/11/2024

## Matrices & Graphes – Calculatrice Autorisée

### EXERCICE 1

2 pts

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = (1 \ 2 \ 0).$$

Calculer, en détaillant :  $A + B$  ;  $3A$  ;  $B \times C$  ;  $D \times A$ .

### EXERCICE 2

2 pts

On considère la suite  $A$  définie par :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 0 ; u_{n+1} = u_n + 2^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Établir par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a l'égalité :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

### EXERCICE 3

4 pts

On considère le système suivant :  $(S) : \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$

- 1) Écrire le système sous la forme d'une équation matricielle :  $AX = B$ , en précisant  $A, X$  et  $B$ .
- 2) Déterminer la matrice inverse de  $A$  à l'aide de la calculatrice et résoudre le système.

### EXERCICE 4

3 pts

On considère les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On donne  $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

- 1) Calculer  $A^2 - 3A + 2I$ .
- 2) En déduire que la matrice  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$  en fonction de  $A$  et de  $I$ .

**EXERCICE 5**

2 pts

$a$  et  $b$  sont deux réels. On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 5 & b & -1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 2 & -1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$ .

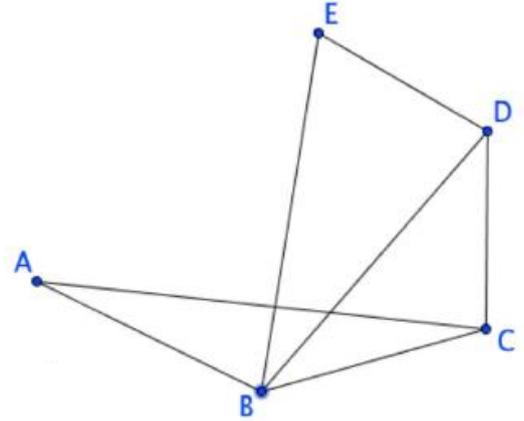
Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $A^{-1} = B$ .

**EXERCICE 6**

4 pts

On considère le graphe ci-contre :

- 1) Quel est l'ordre du graphe ?
- 2) Le graphe est-il complet ? connexe ? Justifier.
- 3) Déterminer le degré de chaque sommet (faire un tableau)
- 4) Construire la matrice d'adjacence  $M$  du graphe.
- 5) Déterminer une chaîne non fermée de longueur 5, une chaîne fermée de longueur 5 et un cycle de longueur 5.

**EXERCICE 7**

3 pts

**PARTIE A**

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux. Le graphe orienté ci-contre indique les différents parcours conseillés partant de  $D$  et terminant à  $F$ .

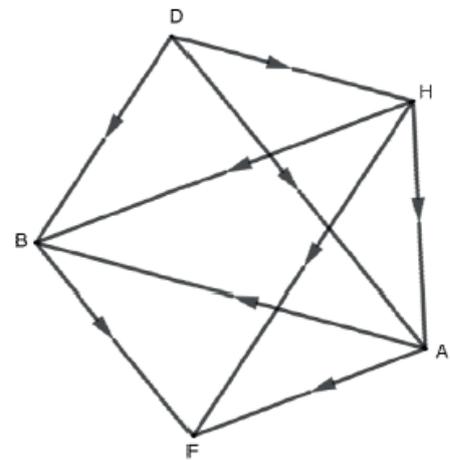
Les sommets sont  $D$  (départ),  $B$  (banc pour abdominaux),  $H$  (haies),  $A$  (anneaux) et  $F$  (fin du parcours).

Les arêtes représentent les différents sentiers reliant les sommets.

On note  $M$  la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.

- 1) Déterminer  $M$ .

- 2) On donne  $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Assia souhaite aller de  $D$  vers  $F$  en faisant un parcours constitué de 3 arêtes.

Est-ce possible ? Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter ? Préciser ces trajets.

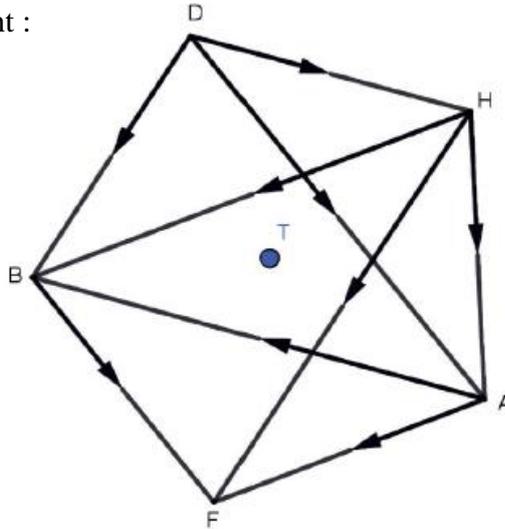
**PARTIE B**

Le responsable souhaite ajouter une barre de traction notée  $T$ .

De nouveaux sentiers sont construits et de nouveaux parcours sont possibles. La matrice d'adjacence  $N$  associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans lequel les sommets sont classés dans l'ordre alphabétique, est donnée ci-contre :

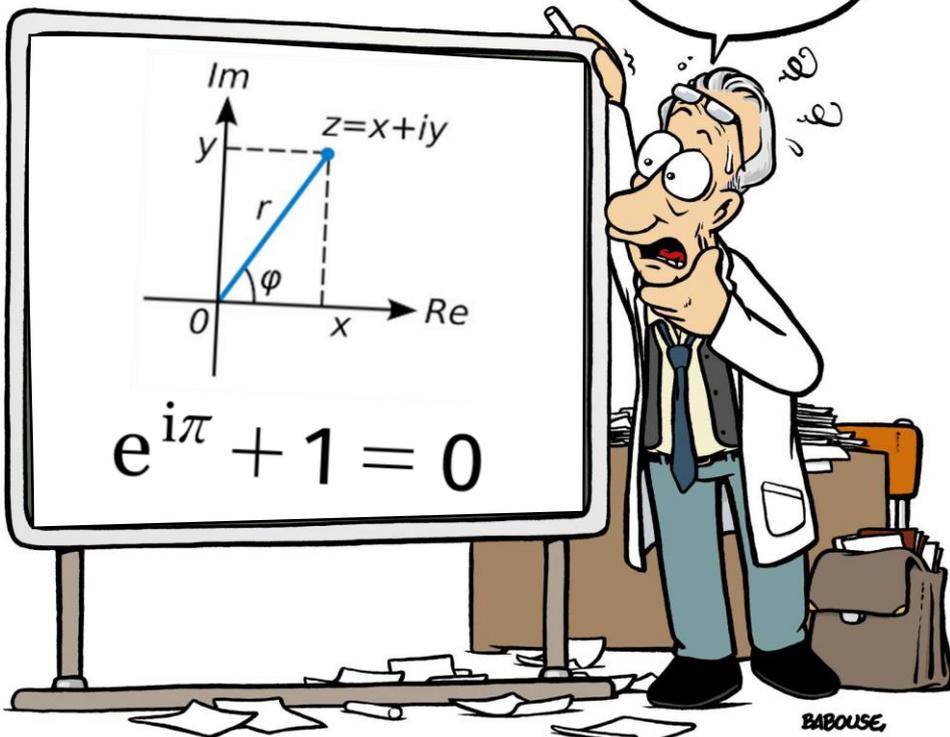
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compléter le graphe orienté suivant :



**CRISE DE VOCATION  
CHEZ LES PROFS DE MATHS**

Y'A DES ÉQUATIONS VRAIMENT TROP COMPLIQUÉES À EXPLIQUER...!



Mais non, ce n'est pas aussi compliqué, et d'ailleurs nous verrons cette équation dans la deuxième partie sur les nombres complexes...

*En attendant, voici la petite blague du jour :*

*Quel est le comble pour un prof de math ?*

*La Vitamine C mais elle ne dira rien !!! ^^*

*Allez, je vous donne la réponse :*

*Mourir dans l'exercice de ses fonctions...*

*C'est à mourir de rire non ??? Bon courage...*