

CONTRÔLE : OPTION MATHS EXPERTES

Nombres Complexes et Equations Polynomiales – Calculatrice Autorisée

12/11/2024

EXERCICE 1

3 pts

1. a) Simplifier puis donner la forme algébrique du nombre complexe :

$$Z = 3i(1 + 2i - (2 - i)), \text{ on précisera : } \operatorname{Re}(Z) \text{ et } \operatorname{Im}(Z).$$

b) Déterminer le conjugué de Z .

2. Déterminer les formes algébriques de :

a) $(4 + 5i)^2$

b) $\frac{2 - 4i}{2i - 3}$

3. Donner la forme algébrique de $(2 - i)^5$.

EXERCICE 2

2,5 pts

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $-2iz = 3z + 1$

2) $z = 3\bar{z} + 5 - i$ (on pourra poser $z = x + iy$ avec x et y des réels)

EXERCICE 3

4,5 pts

1) Résoudre dans \mathbb{C} : $z^2 - z + 2 = 0$

2) Soit Q le polynôme défini sur \mathbb{C} par $Q(z) = z^3 + z^2 + 4$,

a) Vérifier que -2 est une racine de Q .

b) Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$Q(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$$

c) Déterminer les racines de Q .

EXERCICE 4

5 pts

On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur \mathbb{C} par $P(z) = z^2 - 2z + 9$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 6$.
2. Soit m un réel. On considère l'équation (E) : $P(z) = m$ d'inconnue z dans \mathbb{C} .
Pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet-elle deux solutions complexes conjuguées ? Justifier.
3. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On écrit $z = x + iy$ et $z' = P(z) = x' + iy'$ où x, y, x' et y' désignent quatre réels.
 - a. Exprimer la forme algébrique de $P(z)$ en fonction de x et y .
 - b. Déterminer l'ensemble E des points $M(x ; y)$ tels que z' soit un réel.

EXERCICE 5

5 pts

On considère l'équation $z^3 - (3 + i)z^2 - (2 + 5i)z + 8 + 14i = 0$.

1. Vérifier que 2 est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres complexes a, b, c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - (3 + i)z^2 - (2 + 5i)z + 8 + 14i = (z - 2)(az^2 + bz + c).$$

3. Déterminer les racines carrées de $16 + 30i$.
4. En déduire toutes les solutions de l'équation $z^3 - (3 + i)z^2 - (2 + 5i)z + 8 + 14i = 0$.

A ne pas faire lors d'un entretien :

Lors d'un entretien d'embauche, l'employeur demande :

- Quelle est votre principale qualité ?
- Je suis très rapide en calcul mental.
- 23×547 ?
- 56
- Mais c'est faux !
- Oui mais c'est rapide !

Ne soyez pas aussi rapide... faites tout ce qu'il faut, mais juste...