

# CONTRÔLE OPTION MATHS EXPERTES

30/01/2025

## Congruences & Divisibilité – Calculatrice Autorisée

### EXERCICE 1

2 pts

On recherche les entiers relatifs  $n > 3$  tels que  $n - 3$  divise  $n^2 + 5$ .

- 1) Vérifier que pour tout  $n$  :  $n^2 + 5 - (n - 3)(n + 3) = 14$ .
- 2) Trouver tous les entiers relatifs  $n > 3$  tels que  $n - 3$  divise  $n^2 + 5$ .

### EXERCICE 2

3 pts

- 1) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2 025 et 2 018 par 7 ?
- 2) Montrer que  $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ .
- 3) Quel est le reste de  $2\,025^{2\,025}$  dans la division par 7 ?
- 4) Quel est le reste de  $2\,018^{2\,018}$  dans la division par 7 ?

### EXERCICE 3

4 pts

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = 11^{2n} + 2^{n+4}$ .

- 1) Calculer  $u_0, u_1$ . Vérifier que  $u_1 \equiv 0 \pmod{17}$ .
- 2) Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de  $11^2$  par 17.
- 3) Démontrer que pour tout  $n$ ,  $u_n$  est un multiple de 17.

### EXERCICE 4

3 pts

- 1) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $1\,000n \equiv n \pmod{111}$ .
- 2) Expliquer comment on trouve le reste de la division par 111 du nombre 123 456 789, sans poser la division.

### EXERCICE 5

4 pts

On appelle inverse de  $x$  modulo 5 un entier  $y$  tel que  $xy \equiv 1 \pmod{5}$ .

- 1) Déterminer un inverse de  $x = 2$ .
- 2) Est-il vrai que 4 est son propre inverse ?
- 3) Le nombre 5 admet-il un inverse ? Justifier.
- 4) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  les équations :  
 $(E_1) : 9x \equiv 12 \pmod{5}$       et       $(E_2) : 2x + 3 \equiv 3 \pmod{5}$

### EXERCICE 6

4 pts

Soit l'équation  $17x + 6 \equiv 6x - 4 \pmod{8}$ .

- 1) Résoudre cette équation à l'aide d'une table de congruence.
- 2) Donner les solutions de cette équation qui sont dans l'intervalle  $[100 ; 140]$ .