BACCALAUREAT GÉNÉRAL BLANC

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DU Jeudi 6 Février 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, en mode examen, conformément à la règlementation en vigueur. METTRE SA CALCULATRICE EN MODE EXAMEN.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées (ne pas rendre le sujet).

EXERCICE 1

4 pts

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question, la lettre choisie et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les cinq questions sont indépendantes.

1) On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier naturel par :

$$u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$$

Cette suite :

<u>**Réponse A**</u> : **Diverge vers $+\infty$.**

<u>**Réponse B**</u> **: Converge vers 0.**

<u>**Réponse C**</u> **: Converge vers $\frac{2}{5}$.**

<u>**Réponse D**</u> **: Converge vers $\frac{1}{3}$.**

2) On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(t) = \frac{a}{b+e^{-t}}$$

où a et b sont deux nombres réels.

On sait que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 3$. Les valeurs de a et b sont :

<u>**Réponse A**</u> : **$a = 2$ et $b = 3$.**

<u>**Réponse B**</u> **: $a = 4$ et $b = \frac{4}{3}$.**

<u>**Réponse C**</u> **: $a = 4$ et $b = 1$.**

<u>**Réponse D**</u> **: $a = 6$ et $b = 2$.**

Pour les trois questions suivantes : l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$.
On considère les points $A(-1\,;2\,;\,5), B(3\,;6\,;3), C(3\,;0\,;9)$ et $D(8\,;\,-3\,;-8)$.
On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

3) ABC est un triangle :

<u>**Réponse A**</u> : **Isocèle rectangle en A.**

<u>**Réponse B**</u> **: Isocèle rectangle en B.**

<u>**Réponse C**</u> **: Isocèle rectangle en C.**

<u>**Réponse D**</u> **: Équilatéral.**

4) Une équation cartésienne du plan (BCD) est :

<u>**Réponse A**</u> : **$2x + y + z - 15 = 0$.**

<u>**Réponse B**</u> **: $9x - 5y + 3 = 0$.**

<u>**Réponse C**</u> **: $4x + y + z - 21 = 0$.**

<u>**Réponse D**</u> **: $11x + 5z - 73 = 0$.**

5) On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - 2y - 2z + 15 = 0$. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
On peut affirmer que :

<u>Réponse A</u> : $\boldsymbol{H(-2\,;17\,;12)}$.

<u>Réponse B</u> : $\boldsymbol{H(3\,;7\,;2)}$.

<u>Réponse C</u> : $\boldsymbol{H(3\,;2\,;7)}$.

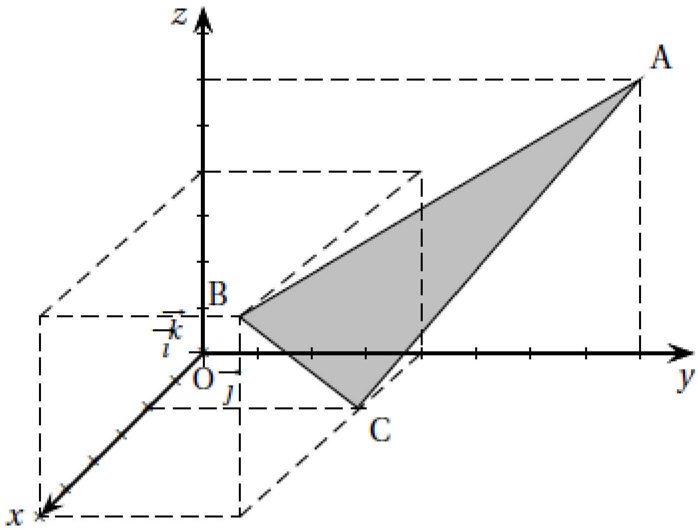
<u>Réponse D</u> : $\boldsymbol{H(-15\,;1\,;-1)}$.

EXERCICE 2

6 pts

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

A(0 ; 8 ; 6), B(6 ; 4 ; 4) et C(2 ; 4 ; 0).



1. **a.** Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient D et E les points de coordonnées respectives (0; 0; 6) et (6; 6; 0).
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).
   b. Montrer que le milieu I du segment [BC] appartient à la droite (DE).
3. On considère le triangle ABC.
   a. Déterminer la nature du triangle ABC.
   b. Calculer l'aire du triangle ABC en unité d'aire.
   c. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie à 0,1 degré.
4. On considère le point H de coordonnées $\left(\frac{5}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,-\frac{5}{3}\right)$.
   Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
   En déduire la distance du point O au plan (ABC).

EXERCICE 3 *5 pts*

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l c l} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=...
        u=...
    return n
```

EXERCICE 4 *5 pts*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} - (2x+1)\mathrm{e}^{x}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 2x - 3$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. **a.** On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = 6\mathrm{e}^{2x} - 2$.

   b. Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.

   c. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.

3. **a.** Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.

   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

   Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^{x}g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.

2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.