**Contrôle Option Maths Expertes**

**26/02/2025**

***Congruences & Divisibilité – Calculatrice Autorisée***

**Exercice 1 3 pts**

1. Déterminer l’ensemble des entiers $x$ tels que $2x≡3 (5)$.
2. Déterminer l’ensemble des entiers $x$ tels que $x^{2}≡3 (5)$.
3. Déterminer l’ensemble des entiers $x$ tels que $(3x+4)(2x+1)≡0 (5)$.

**N.B** : On pourra faire un seul tableau de restes pour l’ensemble des trois questions.

**Exercice 2 2 pts**

Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs tels que $a≡4 (6)$ et $b≡5 (6)$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $a^{2}$ par $6$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2a-7b$ par $6$.

**Exercice 3 2 pts**

Sans utiliser le raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel $n$ :

$$3×5^{2n+1}+2^{3n+1} est divisible par 17.$$

**Exercice 4 2 pts**

Les deux questions sont indépendantes :

1. Résoudre dans $Z$ l’équation : $x+5≡9 (42)$.
2. Montrer que $6 $n’admet pas d’inverse modulo $4$.

**Exercice 5 3 pts**

1. Donner le reste de la division euclidienne de $2 024^{2 024}$ par $7$.
2. Donner les restes dans la division euclidienne de $9^{n} par$ $13$ pour$ n$ allant de $0$ à $4$.

Donner le reste de la division euclidienne de $2 024^{2 024}$ par 13.

**Exercice 6 5 pts**

On considère l’équation $\left(F\right) :11x^{2}-7y^{2}=5$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

1. Démontrer que si le couple $(x ;y)$ est solution de $(F)$, alors $x^{2}≡2 y^{2} (5)$.
2. Soient $x$ et $y$ des entiers relatifs. Compléter sur le sujet, sans justification, les deux tableaux suivants :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Modulo** $5$**,** $x$ **est congru à …** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |  |
| **Modulo** $5$**,** $x^{2}$ **est congru à …** |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Modulo** $5$**,** $y$ **est congru à …** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |  |
| **Modulo** $5$**,** $2y^{2}$ **est congru à …** |  |  |  |  |  |  |

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $x^{2}$ et de $2y^{2}$ par $5$ ?

1. En déduire que si le couple $(x ;y)$ est solution de $(F)$, alors $x$ et $y$ sont des multiples de $5$.
2. Démontrer que si $x$ et $y$ sont des multiples de $5$, alors le couple $(x ;y)$ n’est pas solution de $(F)$. Que peut-on en déduire pour l’équation $(F)$ ?

**Exercice 7 3 pts**

A la pointe ouest de l’Île de Ré, se situe le grand phare des baleines. L’escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre $246$ et $260$.

Léo et Raphaël sont deux grands sportifs. Léo qui est plus jeune monte les marches 4 par 4 et à la fin, il lui reste 1 marche. Raphaël, lui, monte les marches 3 par 3 et à la fin, il lui reste 2 marches.

Combien l’escalier compte-t-il de marches ? ***On expliquera clairement la méthode utilisée***.



**C’est de l’arithmétique n’est-ce pas ???**

**C’est à méditer, mais pour l’instant, foncez !!!!!**

**Bon courage et amusez-vous bien…**