CONTRÔLE OPTION MATHS EXPERTES

27/05/2025

Calculatrice Autorisée – Durée 1h

EXERCICE 1 **6 pts**

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents : l'état stable (S) et l'état excité (E). A chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Dans le milieu de notre étude, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0{,}005$ et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0{,}6$.

On observe un atome d'hydrogène initialement stable. On appelle X_n l'état de l'atome après n nanosecondes. On admet que (X_n) est une chaîne de Markov.

1) Tracer le graphe associé à cette chaîne de Markov.

2)

- **a)** Déterminer la matrice de transition A associée en conservant l'ordre alphabétique.
- **b)** Justifier que la distribution initiale est $\pi_0 = (0\,;1)$.
- **c)** Exprimer π_n en fonction de π_0 et de A (on ne demande pas de justification…)

3)

- **a)** On admet pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 1 - 0{,}395^n & 120 + 0{,}395^n \\ 1 + 120 \times 0{,}395^n & 120 \times (1 - 0{,}395^n) \end{pmatrix}$$

  Exprimer π_n en fonction de n puis déterminer la limite de π_n quand n tend vers $+\infty$.
- **b)** Que peut-on en déduire concernant l'atome ?

EXERCICE 2 **4,5 pts**

Le chat Melkio a pour habitude de dormir soit sur une armoire soit dans son bac.

S'il dort une nuit sur une armoire, la probabilité qu'il dorme sur une armoire la nuit suivante est égale à 0,3.

S'il dort une nuit dans son bac, la probabilité qu'il dorme dans son bac la nuit suivante est de 0,9.

On considère la chaîne de Markov à 2 états A et B respectant les contraintes précédentes en notant :

A : l'état : « Melkio dort sur l'armoire »,

B : l'état : « Melkio dort dans son bac ».

1) Construire le graphe associé à cette chaîne de Markov.

2) Déterminer la matrice de transition P.

3) Expliquer pourquoi cette chaîne de Markov possède une distribution invariante.

4) Démontrer que $\pi = (x\,;y)$ est une distribution invariante de cette chaîne de Markov, si et seulement si, $(x\,;y)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 0{,}7\,x - 0{,}1\,y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

5) Résoudre ce système et conclure pour π.

EXERCICE 3 — 6 pts

On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $7x - 5y = 1$.

1)

a) Vérifier que $(3\,;4)$ est une solution de (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples solutions de (E).

2) Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons, il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

EXERCICE 4 — 3,5 pts

Soit n un entier relatif et $A = n(n+2)(n^2 + 2n + 1)$.

1) Démontrer que A est divisible par 4. (ici on pourra utiliser des tableaux de congruences…)

2) Démontrer que A est divisible par 3.

3) En déduire que A est divisible par 12.