CONTRÔLE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

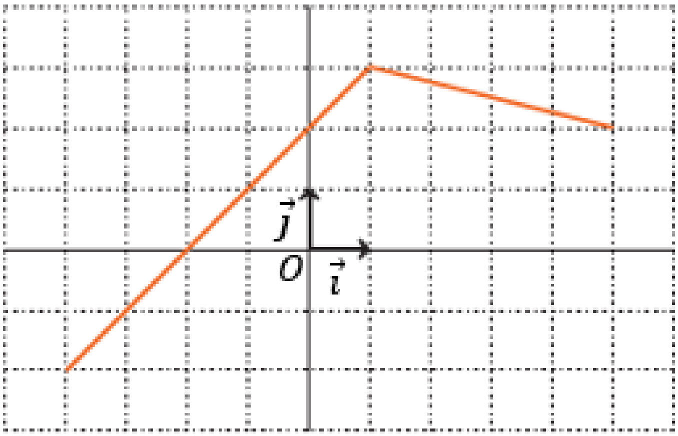
Calcul intégral **21/05/2025**

Durée 2h – ***Calculatrice autorisée***

EXERCICE 1

4 pts

On considère une fonction f dont la courbe représentative est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$:



Déterminer les intégrales suivantes :

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx \quad ; \quad \int_{0}^{5} f(x)\,dx \quad ; \quad \int_{-1}^{3} f(x)\,dx \quad ; \quad \int_{-2}^{5} f(x)\,dx$$

EXERCICE 2

8 pts

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^3 3x^5\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_{-1}^{1} x e^{3x^2}\,dx \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}\,dx$$

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale suivante :

$$I_4 = \int_0^1 x\,e^{-3x}\,dx.$$

EXERCICE 3

4 pts

Un bénéfice en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à :

$$f(x) = \frac{5\ln(x)}{x} + 3.$$

1) Montrer que F définie ci-dessous est une primitive de f sur $[2\,;4]$.

$$F : x \longmapsto \frac{5\,(\ln(x))^2}{2} + 3x$$

2) Calculer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie de 2 000 à 4 000 pièces.

EXERCICE 4

10 pts

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par l'expression :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\, dx.$$

1) Calculer l'intégrale suivante :

$$J_n = \int_0^1 e^{nx}\, dx.$$

2) Calculer I_1.

3) Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).

4) Montrer que pour tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}.$$

5) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 5

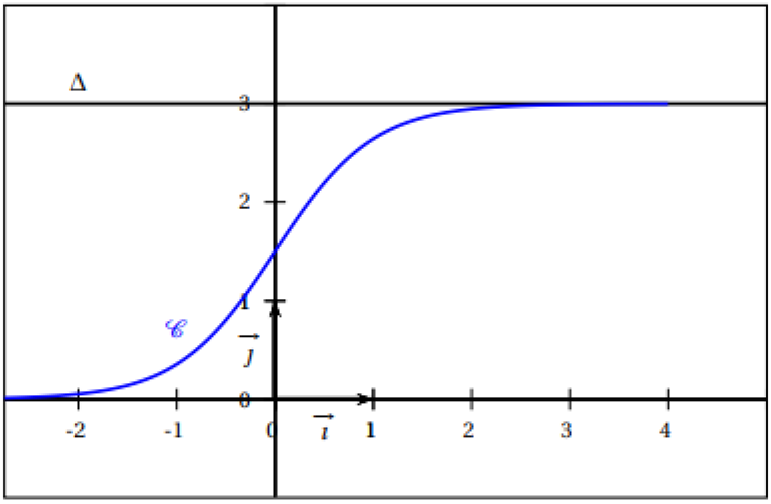
14 pts

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

PARTIE B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1) Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2) On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = -\frac{3}{2}\ln(1 + e^{-2x}).$$

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3) Soit a un réel strictement positif.

a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale :

$$\int_0^a h(x)\ dx.$$

b) Démontrer que :

$$\int_0^a h(x)\ dx = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right).$$

c) On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan défini par :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.