

CONTRÔLE OPTION MATHS EXPERTES

26/02/2025

Congruences & Divisibilité – Calculatrice Autorisée

EXERCICE 1

3 pts

- 1) Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $2x \equiv 3 \pmod{5}$.
- 2) Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x^2 \equiv 3 \pmod{5}$.
- 3) Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $(3x + 4)(2x + 1) \equiv 0 \pmod{5}$.

N.B : On pourra faire un seul tableau de restes pour l'ensemble des trois questions.

EXERCICE 2

2 pts

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \equiv 4 \pmod{6}$ et $b \equiv 5 \pmod{6}$.

- 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de a^2 par 6.
- 2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2a - 7b$ par 6.

EXERCICE 3

2 pts

Sans utiliser le raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \text{ est divisible par } 17.$$

EXERCICE 4

2 pts

Les deux questions sont indépendantes :

- 1) Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation : $x + 5 \equiv 9 \pmod{42}$.
- 2) Montrer que 6 n'admet pas d'inverse modulo 4.

EXERCICE 5

3 pts

- 1) Donner le reste de la division euclidienne de $2 \cdot 024^{2 \cdot 024}$ par 7.
- 2) Donner les restes dans la division euclidienne de 9^n par 13 pour n allant de 0 à 4.
Donner le reste de la division euclidienne de $2 \cdot 024^{2 \cdot 024}$ par 13.

EXERCICE 6

5 pts

On considère l'équation $(F) : 11x^2 - 7y^2 = 5$ où x et y sont des entiers relatifs.

- 1) Démontrer que si le couple $(x ; y)$ est solution de (F) , alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$.
- 2) Soient x et y des entiers relatifs. Compléter sur le sujet, sans justification, les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à ...	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à ...					

Modulo 5, y est congru à ...	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à ...					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

- 3) En déduire que si le couple $(x ; y)$ est solution de (F) , alors x et y sont des multiples de 5.
- 4) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x ; y)$ n'est pas solution de (F) . Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

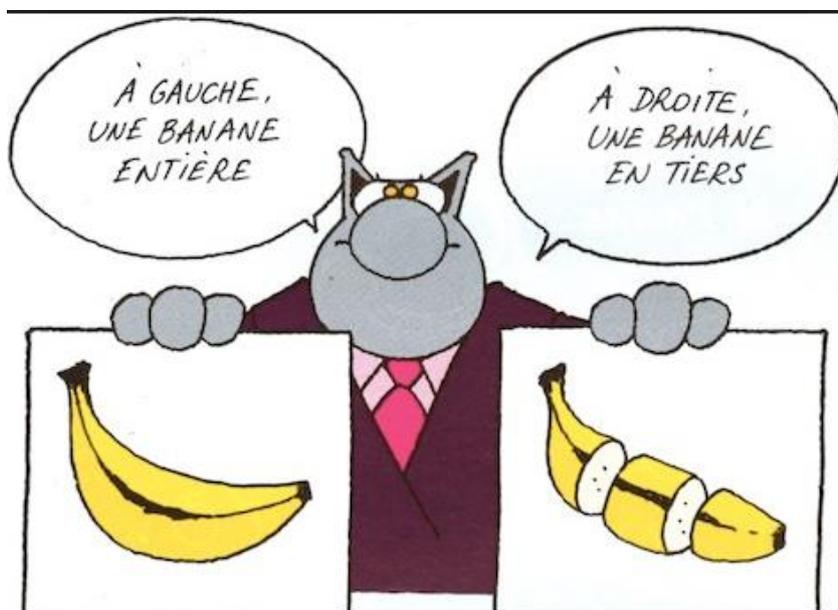
EXERCICE 7

3 pts

A la pointe ouest de l'Île de Ré, se situe le grand phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 246 et 260.

Léo et Raphaël sont deux grands sportifs. Léo qui est plus jeune monte les marches 4 par 4 et à la fin, il lui reste 1 marche. Raphaël, lui, monte les marches 3 par 3 et à la fin, il lui reste 2 marches.

Combien l'escalier compte-t-il de marches ? *On expliquera clairement la méthode utilisée.*



C'est de l'arithmétique n'est-ce pas ???

C'est à méditer, mais pour l'instant, foncez !!!!

Bon courage et amusez-vous bien...