CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Géométrie dans l'espace – Calculatrice autorisée **21/01/2025**

EXERCICE 1

3 pts

On considère les points $A\,(0\,;1\,;\,-4)\,;B(1\,;3\,;\,-7)\,;C(-4\,;1\,;\,-3)\,;D(1\,;0\,;0)$ et $E(3\,;11\,;8)$.

1) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

2) Démontrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).

5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (DE) et du plan (ABC).

EXERCICE 2

7 pts

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1) Vérifier que le point $A(2\;;\;3\;;\;0)$ appartient à la droite d_1.

2) Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

3) Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1\;;\;-2\;;\;-3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4) Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x+4y-z-22=0$.

b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3\;;\;3\;;\;5)$.

5) On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}(1\;;\;-2\;;\;-3)$, et passant par le point $B(3\;;\;3\;;\;5)$.

a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

EXERCICE 3 **10 pts**

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$ et $C(-1;1;1)$.

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.

a) Démontrer que le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.

b) Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

c) Soit la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{array} \right. , \; t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

4) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Faire de la géométrie, dans l'espace, ce n'est pas la même chose que faire de la géométrie dans l'espace... alors restez sur Terre...

Bon courage pour cette épreuve !!!