BACCALAUREAT GÉNÉRAL BLANC

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DU mercredi 30 Avril 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, en mode examen, conformément à la règlementation en vigueur. METTRE SA CALCULATRICE EN MODE EXAMEN.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées (ne pas rendre le sujet).

EXERCICE 1

5 pts

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(2 ; 5 ; −1), B(3 ; 2 ; 1), C(1 ; 3 ; −2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3+k \\ y & = & 1-4k \\ z & = & 2+3k \end{array}\right. ,k \in \mathbb{R}.$$

1 Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : M(1 ; 9 ; 8);
Réponse B : N(−3 ; −4 ; 6);
Réponse C : P(0 ; 13 ; −7);
Réponse D : Q(−5 ; −7 ; −1).

2 Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

Réponse A : $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix}$;
Réponse B : $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$;
Réponse C : $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
Réponse D : $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3 Une représentation paramétrique de la droite (BC) est :

Réponse A : $\left\{\begin{array}{l} x = 3+2t \\ y = 2+t \\ z = 1 \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$
Réponse B : $\left\{\begin{array}{l} x = 1-t \\ y = 3-t \\ z = -2+2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$
Réponse C : $\left\{\begin{array}{l} x = 8-2t \\ y = 1+t \\ z = -1-3t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$
Réponse D : $\left\{\begin{array}{l} x = 5+2t \\ y = 1-t \\ z = 4+3t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$

4 Les droites (BC) et Δ sont :

Réponse A : strictement parallèles;
Réponse B :sécantes en R(1 ;9 ; −4);
Réponse C : non coplanaires;
Réponse D : sécantes en S(4 ;3 ; 2);

5 On donne U(1 ;0 ; 2) et on rappelle N(−3 ; −4 ; 6) et T est le milieu de $[UN]$:

Réponse A : T(−4 ; −4 ; 4);
Réponse B : T(−2 ; −4 ; 8);
Réponse C : T(−1 ; −2 ; 4);
Réponse D : T(2 ; 2 ; −2);

EXERCICE 2

5 pts

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse.
On définit les événements suivants :
R : « la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange » ;
J : « la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus » ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
   En déduire que $x = \dfrac{1}{6}$.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot. On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On se justifiera et on donnera les paramètres de cette loi.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.
3. Déterminer $E(X)$. Interpréter cette valeur.
4. On considère qu'il y a n bouteilles de jus d'orange et non plus 500.
   Déterminer le plus petit entier n tel que

   $$P(X \geq 1) \geq 0,9999$$

   On justifiera la réponse.

Exercice 3 *5 pts*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1 a. Déterminer soigneusement $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer soigneusement $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2 a. Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$. On montrera que $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$

b. Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3 Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.

4 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note α cette solution.

5 Donner, en le justifiant, une valeur approchée de α au centième.

6 En déduire le signe de $f(x)$ sur l' intervalle $]0;+\infty[$.

7 a. On admet que pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2}$. Etudier la convexité de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T sur l'intervalle $[\sqrt{2}\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 4 *5 pts*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1 Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$

2 a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

3 a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Démontrer que la suite (u_n) converge.

4 Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

5 On considère la fonction en langage python suivante :

```
def limite(p) :
    u=0.5
    n=0
    while u<1-10**(-p) :
        u=3*u/(1+2*u)
        n=n+1
    return n
```

a. Qu'obtient-on si l'on saisit dans la console limite(2) ?

b. Est-on certain que la boucle while s'arrêtera quelle que soit la valeur de l'entier naturel p entrée en argument ?